Traitement des signaux déterministes - Séries de Fourier

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Distributions périodiques

Définition

Une distribution est dite périodique s'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\boxed{\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T(x), \phi(x) \rangle = \langle T(x-a), \phi(x) \rangle = \langle T(x), \phi(x+a) \rangle}$$

Distribution Sha

Définition

$$\boxed{Ш(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)}$$

Transformée de Fourier

$$\boxed{\widehat{Ш}(u) = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-2i\pi un} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2i\pi un} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi un}}$$

Propriétés

Invariance par produit de $e^{2i\pi u}$

$FT(Ш)$ est périodique (de période 1) donc

$$\boxed{e^{2i\pi u}\widehat{Ш}(u) = \widehat{Ш}(u)}$$

Invariance par transformée de Fourier

Il vient alors $e^{2i\pi u}\widehat{Ш}(u) = \widehat{Ш}(u)$ et donc

$$\boxed{\widehat{Ш}(u) = Ш(u)}$$

Généralisation

On peut généraliser la distribution Sha à une somme de Dirac de période T :

$$\boxed{TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nT)\right] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi u \frac{n}{T}}}$$

Transformée de Fourier d'une distribution périodique

Toute distribution périodique est tempérée et admet une transformée de Fourier de la forme

$$\boxed{\widehat{T}(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(u - \frac{n}{T}\right)}$$

Note : Toute fonction périodique peut s'écrire $\boxed{f(x) = f_0(x) * Ш_T(x)}$ avec T la période de f.

Formule de Poisson

Soit f une fonction $f(x) * Ш_T(x) = f(x) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - nT)$

On rappelle que $\left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT), \phi(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - n), \widehat{\phi}(u) \right\rangle$

Donc $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(n)$

D'où $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-an^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\pi^2 n^2}{a}}$

Ce qui permet d'approcher $\sqrt{\pi}$ par $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2}$